Kern	Niveau	Wellenfunktionen der Zwischenkoppelung	*LS*	*jj*
C^{13}	Grund	${}^{22}P^{[441]}_{\frac{1}{2}}$ ${}^{22}P^{[432]}_{\frac{1}{2}}$ ${}^{24}P^{[432]}_{\frac{1}{2}}$ ${}^{24}D^{[432]}_{\frac{1}{2}}$ ${}^{22}S^{[333]}_{\frac{1}{2}}$	${}^{22}P^{[441]}_{\frac{1}{2}}$	$p^8_{\frac{3}{2}}$ $p_{\frac{1}{2}}$
N^{14}	Grund	${}^{13}S^{[442]}_{1}$ ${}^{13}D^{[442]}_{1}$ ${}^{11}P^{[433]}_{1}$	${}^{13}S^{[442]}_{1}$	$p^8_{\frac{3}{2}}$ $p^2_{\frac{1}{2}}$
N^{14}	2,31 MeV	${}^{31}S^{[442]}_{0}$ ${}^{33}P^{[443]}_{0}$	${}^{31}S^{[442]}_{0}$	$p^8_{\frac{3}{2}}$ $p^2_{\frac{1}{2}}$
N^{14}	3,95 MeV	${}^{13}S^{[442]}_{1}$ ${}^{13}D^{[442]}_{1}$ ${}^{11}P^{[433]}_{1}$	${}^{13}D^{[442]}_{1}$	$p^7_{\frac{3}{2}}$ $p^3_{\frac{1}{2}}$

Tab. 1.

eingehend von mehreren Autoren untersucht [5]. Mit Rosenfelds Sättigungspotential für H_1 und der üblichen Spin-Bahn-Wechselwirkung ergeben sich mit $\zeta = 4{,}4$ die ersten drei Niveaus von N^{14} in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Schalenmodell. In Tab. 1 ist angegeben [6], welche *LS*-Wellenfunktionen ihnen und dem Grundzustand von C^{13} ($\zeta = 5$) entsprechen.

Die spektroskopische Bezeichnung der Wellenfunktionen erfolgt gemäß ${}^{2T+1\;2S+1}L^{[a]}_J$.

Mit dem geometrischen Teil der Winkelverteilung in Racah- und Clebsch-Gordan-Koeffizienten [1] erhält man für den 3,9 MeV- und den 1,6 MeV-γ-Strahl (magnetische Dipole)

$$W(\vartheta) = \sum_{s\nu} \beta_s^2 (-1)^{s-1} (1100 \mid \nu\, 0)\,(11-11 \mid \nu\, 0)\, W(1111, s\,\nu)\, W(1111, 1\,\nu)\, P_\nu(\cos\vartheta) = 1 - 0{,}12\, P_2 . \qquad (5)$$

Reine *LS*-Koppelung ergäbe

$$W(\vartheta) = 1 - 0{,}5\, P_2 . \qquad (6)$$

Reine *jj*-Koppelung könnte den Protoneneinfang in das 3,95 MeV-Niveau nicht als Ein-Partikel-Übergang wiedergeben; im übrigen wäre die Winkelverteilung isotrop.

Winkelverteilungen sollten also einen weiteren Prüfstein für die Theorie der Zwischenkoppelung bilden.

[5] F. Ajzenberg u. T. Lauritsen, Rev. Mod. Phys. **27**, 77 [1955].

[6] T. Auerbach u. J. B. French, Phys. Rev. **98**, 1276 [1955].

Analyse des allgemeinsten Verzerrungstensors

Von E. Kröner

Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart und Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart

(Z. Naturforschg. **11 a**, 95—96 [1956]; eingeg. am 17. November 1955)

Während die sog. *äußeren* Spannungen in einem elastischen Medium durch Volumenkräfte $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ und Flächenkräfte $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ hervorgerufen werden, kann man sich die sog. *inneren* Spannungen immer durch im Volumen oder auf Flächen verteilte Versetzungen mit der tensoriellen Dichte $\alpha(\mathfrak{r})$ bzw. $\beta(\mathfrak{r})$ entstanden denken.

Eine allgemeine lineare Theorie aller elastischen und eines großen Teils der plastischen Erscheinungen läßt sich am besten formulieren, wenn man den (symmetrischen) Deformationstensor $\varepsilon^S(\mathfrak{r})$ und den antimetrischen Rotationstensor $\varepsilon^A(\mathfrak{r})$ zu einem allgemeinen nichtsymmetrischen Verzerrungstensor $\varepsilon(\mathfrak{r})$ zusammenfaßt. Der Spannungstensor $\sigma(\mathfrak{r})$ bleibt dagegen symmetrisch.

Wir betrachten zunächst einen unendlich ausgedehnten, homogenen, aber anisotropen Körper in unverzerrtem Zustand. Nehmen wir ein beliebiges Volumenelement, und zwingen wir ihm eine Verzerrung auf. Dies kann in zweierlei Weise geschehen.

1. Wir verzerren, ohne vorher an irgend einer Stelle des Elementes die Verbindung zur Umgebung zu lösen. Von einer solchen Verzerrung sagen wir, sie geschehe ohne Änderung der Nachbarschaftsverhältnisse, oder sie erfolge elastisch.

2. Wir führen an irgend einer Stelle des Volumenelementes einen infinitesimalen Schnitt, verschieben beide Ufer des Schnittes gegeneinander, füllen evtl. noch Materie ein oder beseitigen welche und kleben dann die Schnittflächen wieder zusammen. Das Volumenelement kann auch ganz ausgeschnitten werden, gegenüber seiner Umgebung um einen kleinen Winkel gedreht und wieder angeklebt werden. Von einer solchen Verzerrung sagen wir, sie ändere die Nachbarschaftsverhältnisse, oder sie erfolge plastisch.

Zur Erzeugung der elastischen Verzerrung benötigt man Kräfte; mit der Erzeugung der plastischen Verzerrung führt man Versetzungen in das Medium ein. Das elastische (nichtsymmetrische) Verzerrungsfeld läßt sich durch Gradientenbildung aus einem Vektorfeld der Verschiebungen $\mathfrak{s}(\mathfrak{r})$, das plastische Verzerrungsfeld durch Rotorbildung aus einem namenlosen nichtsymmetrischen Tensorfeld $\mathfrak{J}(\mathfrak{r})$ ableiten. Man hat

$$\varepsilon = \mathrm{Grad}\,\mathfrak{s} + \mathrm{Rot}\,\mathfrak{J}$$

mit[1] Grad $\mathfrak{s} \equiv \nabla \mathfrak{s}$, Rot $\mathfrak{J} \equiv \nabla \times \mathfrak{J}$.

Der erste Anteil ist aus der gewöhnlichen Elastizitätstheorie genügend bekannt. Zu einer Analyse des zweiten Teiles hat man diesen in seine invarianten Bestandteile zu zerlegen. Mit der stets zulässigen Zerlegung $\mathfrak{J} = \iota \times \nabla + \mathfrak{a}\nabla$ erhält man, wenn man noch den nichtsymmetrischen Tensor ι in symmetrischen ι^{S} und antimetrischen ι^{A} aufteilt,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}\,\mathfrak{J} &= \mathrm{Ink}\,\iota^{\mathrm{S}} + \mathrm{Def}\,(\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}) \\ &\quad + \mathrm{Ink}\,\iota^{\mathrm{A}} - \tfrac{1}{2}\left[\nabla(\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}) - (\mathrm{rot}\,\mathfrak{a})\nabla\right]\end{aligned}$$

oder mit $\mathfrak{u} \equiv \mathrm{rot}\,\mathfrak{a}$, $\mathrm{div}\,\mathfrak{u} \equiv 0$ und der skalaren Ortsfunktion $\lambda(\mathfrak{r}) \equiv \mathrm{div}\,\overrightarrow{\iota^{\mathrm{A}}}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}\,\mathfrak{J} &= \mathrm{Ink}\,\iota^{\mathrm{S}} + \mathrm{Def}\,\mathfrak{u} \\ &\quad + (\mathrm{grad}\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{u}) \times I\,.\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathrm{Ink}\,\iota^{\mathrm{S}} \equiv \nabla \times \iota^{\mathrm{S}} \times \nabla$, $\mathrm{Def}\,\mathfrak{u} \equiv \tfrac{1}{2}(\nabla\mathfrak{u} + \mathfrak{u}\nabla)$, $I \equiv$ Einheitstensor 2. Stufe.

Zur physikalischen Bedeutung dieser Glieder: Ink ι^{S} ist der spannungserzeugende Anteil der plastischen Deformation. Er enthält (in seinem Kugeltensoranteil) die Wirkung neu zugefüllter oder weggenommener Materie. Def $\mathfrak{u}$ entspricht einer Deformation, die man sich ebenso wie Ink ι^{S} durch Materietransport infolge Laufens von Versetzungen entstanden denken kann. Diese Deformation erzeugt jedoch keine Spannungen. Die Rolle von $\mathfrak{u}$ wird noch klarer durch die Feststellung, daß $\mathrm{d}\mathfrak{u}/\mathrm{d}t$ mit dem in der Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten gebrauchten Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ identisch ist. Demnach hat $\mathrm{div}\,\mathfrak{u} = 0$ die Bedeutung einer Kontinuitätsgleichung. Mit der Deformation Def $\mathfrak{u}$ sind zwangsläufig die Drehungen rot $\mathfrak{u}$ verbunden; grad λ sind Drehungen, die ohne gleichzeitige Deformation vor sich gehen. Letztere kann man durch Ausschneiden, Verdrehen und Zusammenkleben von Volumenteilen mit Rotationssymmetrie erzeugen.

Der axiale Vektor $\mathrm{grad}\,\lambda + \mathrm{rot}\,\mathfrak{u}$ beschreibt die plastische Drehung des Volumenelementes gegenüber der Ausgangslage. Man kann zeigen, daß die drei Funktionen, die in λ und $\mathfrak{u}$ stecken, durch die etwa für $\mathfrak{J}$ zu stellende Nebenbedingung $\mathrm{Div}\,\mathfrak{J} = 0$ nicht an ι^{S} (ebenfalls drei Funktionen) gekoppelt werden.

Nach dieser Analyse lassen sich die elastisch-plastischen Grundgleichungen sehr übersichtlich formulieren. Es gelten im Volumen die Gleichungen[2]

$$\mathrm{Rot}\,\varepsilon = \alpha\,, \quad \mathrm{Div}\,\sigma + \mathfrak{F} = 0\,. \tag{*}$$

Hinzu kommt die Gleichung für die Energiedichte

$$e = \tfrac{1}{2}\,\sigma\,..\,\varepsilon^{\sigma}\,, \quad \varepsilon^{\sigma} \equiv \mathrm{Def}\,\mathfrak{s} + \mathrm{Ink}\,\iota^{\mathrm{S}}$$

und das Hookesche Gesetz in der Form

$$\sigma = c\,..\,\varepsilon^{\sigma}$$

($c =$ Hookescher Tensor 4. Stufe, nur die Spannungs-erzeugenden Anteile ε^{σ} des Verzerrungstensors dürfen im Hookeschen Gesetz vorkommen).

Für Flächen, die zwei Medien I und II trennen, leitet man aus (*) in der üblichen Weise die Grenzbedingungen

$$(\mathfrak{n} \times \varepsilon)_{\mathrm{I}} - (\mathfrak{n} \times \varepsilon)_{\mathrm{II}} = -\beta\,, \quad (\mathfrak{n} \cdot \sigma)_{\mathrm{I}} - (\mathfrak{n} \cdot \sigma)_{\mathrm{II}} = \mathfrak{A}$$

ab ($\mathfrak{n}$ = Normaleneinheitsvektor, β, $\mathfrak{A}$ = Flächendichte der Versetzungen bzw. äußeren Kräfte).

Zum Schluß geben wir noch die Energiegleichung für einen einfach zusammenhängenden endlichen Körper im Sonderfall $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} = 0$. Der Körper soll von einem starren Medium umgeben sein und an diesem haften. Es gilt dann

$$E = \tfrac{1}{2}\iiint \tilde{\varphi}\,..\,\alpha\,\mathrm{d}\tau + \tfrac{1}{2}\iint \tilde{\varphi}\,..\,\beta\,\mathrm{d}f$$

mit $\tilde{\varphi}_{ij} \equiv \varphi_{ji}$. Dabei ist $\varphi(\mathfrak{r})$ der durch die Gleichungen $\sigma = \mathrm{Rot}\,\varphi$, $\mathrm{Div}\,\varphi = 0$ definierte, nichtsymmetrische Spannungsfunktionstensor. φ eignet sich besonders zur Berechnung der mit einer räumlichen Versetzungsdichte verbundenen Spannungen.

Den Herren Prof. U. Dehlinger, Dr. A. Seeger und Dipl.-Phys. G. Rieder sei für zahlreiche Diskussionen herzlich gedankt.

[1] Bezeichnungen in den Tensorformeln nach M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, Akad. Verl.-Ges. Leipzig 1928.

[2] Die Gleichung Rot $\varepsilon = \alpha$ wurde von B. A. Bilby, Rep. Conf. Def. in Cryst. Solids, Bristol 1955, S. 124 (ohne Analyse des Verzerrungszustandes), und unabhängig vom Verf. in Z. Phys. **142**, 463 [1955] (mit Teilanalyse), angegeben. Weitere Zitate zur vorliegenden Arbeit werden in einer ausführlicheren Darstellung folgen.

Zu Fröhlichs eindimensionalem Modell der Supraleitung

Von H. Haken

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen

(Z. Naturforschg. **11 a**, 96—98 [1956]; eingeg. am 19. November 1955)

Währ nd die Entdeckung der Isotopie-Verschiebung des Sprungpunktes die Fröhlichsche Vorstellung[1], daß die Supraleitung auf Grund der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Gitterschwingungen zustandekommt, stark unterstützte, zeigte dann die genauere Diskussion[2] der Fröhlichschen wie auch der Bar-

[1] H. Fröhlich, Phys. Rev. **79**, 845 [1950]; Proc. Phys. Soc., Lond. A **63**, 778 [1950].

[2] W. Kohn u. Vachaspati, Phys. Rev. **83**, 462 [1951]; G. Wentzel, Phys. Rev. **83**, 168 [1951]; M. R. Schafroth, Helv. Phys. Acta **24**, 645 [1951].